Objectif agrégation Beck Malick Peyré p 140-142.

201
213
234
239
245
250

Développement : Densité des polynômes dans $L^2(I,\rho)$

Théorème (principe du prolongement analytique) Soit U un ouvert connexe. Si deux fonctions analytiques coïncident sur un sous ensemble $D \subset U$ ayant un point d'accumulation dans U, alors elles sont égales sur U.

Théorème (intégrale dépendant d'un paramètre holomorphe) Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \times X \to \mathbb{C}$.
On pose $\forall z \in \mathbb{C}$, $F(z) = \int_X f(z,x)\, d\mu(x)$.
Supposons que :
i) $\forall z \in U$, $x \mapsto f(z,x)$ est mesurable.
ii) $\exists N \subset X$, $\mu(N) = 0$, $\forall x \notin N$, $z \mapsto f(z,x)$ est holomorphe.
iii) $\forall K \subseteq U$ compact, $\exists g \in L^1(X)$ tq $|f(z,x)| \leq g(x)$ $\forall x \notin N$ et $\forall z \in K$.
Alors F est holomorphe sur U et pour tout $z \in U$ et tout $m \in \mathbb{N}$,

$$F^{(m)}(z) = \int_X \frac{\partial^m f}{\partial z^m}(z,x)\, d\mu(x)$$

Définition : Soit H un $\mathbb{K}$ ev ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). L'espace H est dit préhilbertien s'il est muni d'un produit scalaire (produit scalaire hermitien si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Ainsi, un espace préhilbertien est un couple $(H, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ où H est un $\mathbb{K}$ ev et $\langle \cdot,\cdot \rangle$ un produit scalaire sur H. Si un espace préhilbertien est complet pour la norme $\|\ \|$ associée au produit scalaire, on dit que c'est un espace de Hilbert.

Définition : Soit $(H, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ un espace de Hilbert. On dit qu'une famille $(e_i)_{i \in I}$ est une base hilbertienne de H si elle est :
i) orthogonale : $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ $\forall i \neq j \in I$.
ii) normée : $\langle e_i, e_i \rangle = 1$ $\forall i \in I$
iii) totale : $H = \overline{\mathrm{Vect}(e_i)_{i \in I}}$

Définition : Soit (E,d) un espace métrique. On dit que (E,d) est séparable si tout ouvert non vide de E contient au moins un point d'une partie dénombrable de E.

Théorème : Soit $(H, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ un espace de Hilbert séparable et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormée de H. On a équivalence entre :

i) La famille orthonormée $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne.

ii) $\forall x \in H,\ x = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ ie $\lim_{N\to+\infty} \left\| x - \sum_{n=0}^{N} \langle x, e_n\rangle e_n \right\| = 0$

iii) $\forall x \in H,\ \|x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$

iv) On a $\text{Vect}(e_n)^{\perp} = \{0\}$

De plus $\Delta : \begin{array}{l} H \longrightarrow \ell^2(\mathbb{N}) \\ x \longmapsto (\langle x, e_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$ est bien définie et réalise une isométrie surjective de H sur $\ell^2(\mathbb{N})$.

Définition : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle fonction poids une fonction $\rho : I \to \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive et telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_I |x|^n \rho(x)\,dx < +\infty.$$

On note $L^2(I,\rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue ie muni du produit scalaire : $\langle f,g\rangle_\rho = \int_I f(x)\overline{g(x)}\rho(x)\,dx$

Proposition : $(L^2(I,\rho), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace de Hilbert.

Déf/prop : Il existe une unique famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires orthogonaux deux à deux tels que $\deg(P_n) = n$. Cette famille s'appelle la famille des polynômes orthogonaux associées à la fonction ρ.

Développement : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction poids. S'il existe $\alpha > 0$ tel que : $\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)\,dx < +\infty$ alors la famille des polynômes $\left(\frac{P_n}{\|P_n\|_\rho}\right)$ forme une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$ pour la norme $\|\cdot\|_\rho$.

Démo : Par définition $\left(\frac{P_n}{\|P_n\|_\rho}\right)$ forment une famille orthonormée.

noter $E := L^2(I,\rho)$ pour plus de facilité à l'oral

On veut montrer que $\left\{\frac{P_n}{\|P_n\|_\rho}, n\in\mathbb{N}\right\}^{\perp} = \left\{x \mapsto x^n, n\in\mathbb{N}\right\}^{\perp} = \{0\}$

car $\text{vect}\left\{\frac{P_n}{\|P_n\|}, n\in\mathbb{N}\right\} = \text{vect}\left\{x\mapsto x^n, n\in\mathbb{N}\right\}$

par Gram Schmidt.

On sait déjà, par définition du poids que $x \mapsto x^m \in L^2(I,\rho)$ $\forall m \in \mathbb{N}$.

Soit $f \in L^2(I,\rho)$. On va utiliser la fonction auxiliaire définie par :

$$\phi(x) = \begin{cases} f(x)\rho(x) & \text{si } x \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrons que $\phi \in L^1(\mathbb{R})$. On a, pour tout $t \geq 0$, $t \leq \frac{1}{2}(1+t^2)$. d'où :

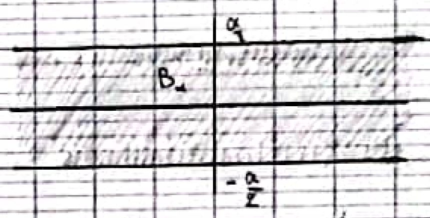
$$\forall x \in I,\ |f(x)|\rho(x) \leq \frac{1}{2}(1+|f(x)|^2)\rho(x)$$

pk ρf^2 int ? car $f \in E$ donc $\int_I f^2\rho < +\infty$

Comme ρ et ρf^2 sont intégrables sur I, on en déduit que $\phi \in L^1(\mathbb{R})$.

On peut donc considérer sa transformée de Fourier i.e. $\forall \omega \in \mathbb{R}$, $\hat{\phi}(\omega) = \int_I f(x) e^{-i\omega x}\rho(x)\,dx$

Montrons que $\hat{\phi}$ se prolonge en une fonction F holomorphe sur $B_\alpha = \{z \in \mathbb{C},\ |\mathrm{Im}(z)| < \frac{\alpha}{2}\}$



On pose $g(z,x) = e^{-izx} f(x)\rho(x)$

Soit $z \in B_\alpha$. On a : $\int_I |g(z,x)|\,dx \leq \int_I e^{\alpha\frac{|x|}{2}} |f(x)|\rho(x)\,dx$

On utilise Cauchy-Schwarz et on obtient :

$$(*)\quad \int_I e^{\alpha\frac{|x|}{2}}|f(x)|\rho(x)\,dx \leq \Big(\underbrace{\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)\,dx}_{<+\infty \text{ par hyp de l'énoncé}}\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\underbrace{\int_I |f(x)|^2\rho(x)\,dx}_{\text{car } f \in L^2(I,\rho)}\Big)^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

On définit la fonction F par :

$$\forall z \in B_\alpha,\quad F(z) = \int_I e^{-izx} f(x)\rho(x)\,dx = \int_I g(z,x)\,dx$$

L'inégalité $(*)$ montre que cette fonction est bien définie. On veut maintenant montrer qu'elle satisfait les hypothèses d'holomorphie sous le signe intégrale.

- $\forall z \in B_\alpha$, $x \mapsto g(z,x)$ est mesurable sur I pk ? car l'int est finie
- Pour presque tout $x \in I$, $z \mapsto g(z,x)$ est holomorphe sur B_α. pk presque tout ?
- $\forall z \in \mathbb{C}$ tq $|\mathrm{Im}(z)| \leq \frac{\alpha}{2}$ on a $|g(z,x)| \leq h(x) := e^{\alpha\frac{|x|}{2}}|f(x)|\rho(x)$ et l'inégalité $(*)$ montre que $h \in L^1(I)$

pourquoi c'est un compact ? fermé ? borné ?

La fonction F est donc holomorphe sur B_α et coïncide sur $\mathbb{R}$ avec $\hat{\phi}$. On peut calculer les dérivées de F :

$$\forall z \in B_\alpha,\ F^{(m)}(z) = (-i)^m \int_I x^m e^{-izx} f(x)\rho(x)\,dx \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Ainsi, on obtient, en évaluant en 0 :

$$F^{(m)}(0) = (-i)^m \int_I x^m f(x)\rho(x)\,dx = (-i)^m \langle f, g_m\rangle_\rho \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

où on définit pour $m \in \mathbb{N}$ $g_m : x \mapsto x^m$.

Scanné avec CamScanner

Supposons maintenant que $f \in \mathrm{Vect}(x^m)^\perp$, ie $\forall m \in \mathbb{N}$, $\langle f, g_m \rangle_\rho = 0$.
On obtient alors que $F^{(m)}(0) = 0$, $\forall m \in \mathbb{N}$.
L'unicité du développement en série entière d'une fonction holomorphe montre que $F = 0$ sur un voisinage de 0. Le théorème de prolongement analytique implique alors que $F = 0$ sur le connexe B_α tout entier et donc en particulier sur l'axe réel. On en déduit que $\hat{\phi} = 0$. Comme ϕ est une fonction intégrable, l'injectivité de ~~transformée~~ transformation ? de Fourier implique que $\phi = 0$.
Comme $\rho(x) > 0$, on en déduit que $f(x) = 0$ pour tout $x \in I$. On a donc montré qu'une fonction orthogonale à tous les polynômes est nulle. On a donc bien que les polynômes orthogonaux forment une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$.

A faire si y'a du temps. Sinon avertir le jury en disant : ⚠ l'hyp sur ρ est vitale !

<u>Contre exemple :</u> Pour $I = \mathbb{R}_+^*$ et le poids $w(x) = x^{-\ln(x)}$, les polynômes orthogonaux pour w ne forment pas une base hilbertienne de $L^2(I, w)$.

<u>Démo :</u> Soit f la fonction définie par $\forall x \in I$, $f(x) = \sin(2\pi \ln(x))$.
Montrons que f est orthogonale à tous les monômes $g_m(x) = x^m$.
On calcule $\langle f, g_m \rangle_w = \int_I x^m \sin(2\pi \ln(x))\, x^{-\ln(x)}\, dx$.
Le changement de variable $y = \ln(x)$ permet d'écrire :

$$\langle f, g_m \rangle_w = \int_{\mathbb{R}} e^{(m+1)y} \sin(2\pi y)\, e^{-y^2}\, dy = e^{\frac{(m+1)^2}{4}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\left(y - \frac{m+1}{2}\right)^2} \sin(2\pi\, [illegible])\, dy$$

Un deuxième changement de variables $t = y - \frac{m+1}{2}$ donne

$$\langle f, g_m \rangle_w = (-1)^m e^{\frac{(m+1)^2}{4}} \int_{\mathbb{R}} \sin(2\pi t)\, e^{-t^2}\, dt = 0$$

puisque la fonction est impaire. Ainsi la famille des g_m n'est pas totale dans H. La famille des polynômes orthogonaux associée à ce poids particulier n'est donc pas totale non plus : ce n'est pas une base hilbertienne.
Ou encore $f \in \mathrm{Vect}((x^m)_{m \in \mathbb{N}})^\perp$ donc la famille des polynômes orthogonaux n'est pas totale car $f \neq 0$.

Scanné avec CamScanner